ANNEE 2000

CONCOURS D'ADMISSION

A

L'ECOLE DE L'AIR

CONCOURS PC/PSI

COMPOSITION
DE
MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures
Coefficient : 13

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la notation tiendra compte du soin et de la rigueur apportés dans le travail.

T.S.V.P.

On notera dans la suite du problème: ♦ $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels.
♦ $\mathbf{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs.
♦ $\mathbf{C}$ le corps des nombres complexes.

On définit une suite récurrente $\{F_n : n \in \mathbf{N}\}$, appelée *suite de Fibonacci* , par :

1
$$\begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad , \forall n \geq 2 \end{cases}$$

1/ a) Montrer que la suite $\{F_n : n \in \mathbf{N}\}$ est définie de manière unique par 1, et vérifie, pour tout $n \in \mathbf{N}$, les inégalités :

2
$$1 \leq F_n \leq 2^n .$$

• En déduire que le rayon de convergence (désigné ici et dans toute la suite du problème par R) de la série entière de terme général $(F_n z^n : n \in \mathbf{N}), z \in \mathbf{C}$, vérifie $R > 0$.

Pour les valeurs de $z \in \mathbf{C}$ telles que la série soit convergente, on note la somme de celle-ci par :

3
$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n z^n$$

• Ci-dessus, et dans la suite du problème, pour une suite $\{b_n : n \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{C}$ arbitraire, on écrit $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ pour exprimer que la somme de la série entière de terme général $(b_n z^n : n \in \mathbf{N})$ est égale à $S(z)$ lorsque cette série converge.

b) Soit $a \in \mathbf{C}$ un nombre complexe arbitraire. On considère la série entière de terme général $(a^{n+1} z^n : n \in \mathbf{N}), z \in \mathbf{C}$.

• Déterminer, en fonction de a, le rayon de convergence r_a de cette série entière.

• Pour les valeurs de $z \in \mathbf{C}$ telles que la série converge, on note la somme de celle-ci par :

4
$$S_a(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^{n+1} z^n$$

Montrer que, lorsque $z \in \mathbf{C}$ vérifie $|z| < r_a$, la somme $S_a(z)$ de la série a une expression simple en fonction de a et z .

c) Montrer que $\Phi(z)$, défini par 3 pour $|z| < R$, vérifie l'identité :

5
$$\Phi(z) = 1 + z.\Phi(z) + z^2.\Phi(z) \quad , \forall z \in \mathbf{C}, |z| < R$$

• En déduire que $\Phi(z)$ peut être mis, de manière unique, sous la forme :

6
$$\Phi(z) = \frac{1}{\beta - \alpha}\left(\frac{\beta}{1-\beta z} - \frac{\alpha}{1-\alpha z}\right) \quad , \forall z \in \mathbf{C}, |z| < R$$

où α et β sont deux réels que l'on déterminera explicitement, en adoptant la convention $\alpha < \beta$.

d) Préciser les valeurs numériques de $\beta + \alpha$, $\beta - \alpha$ et $\alpha\,\beta$.

• Montrer que F_n est de la forme :

7 $$F_n = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\sqrt{5}} \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

• Vérifier réciproquement que l'identité 7 définit de manière unique α et β, compte tenu de l'hypothèse $F_0 = F_1 = 1$. Retrouver ainsi les valeurs numériques des constantes α et β.

e) Dans toute la suite du problème, on définira la suite F_n par 7 pour toute valeur de $n \in \mathbb{Z}$, les constantes α et β étant définies par les relations $F_0 = F_1 = 1$, combinées avec la relation 7 écrite pour $n = 0$ et $n = 1$.

• Préciser la valeur de F_{-1}, compte tenu de cette définition.

• Evaluer la valeur numérique du rayon de convergence R de la série entière de terme général $(F_n z^n : n \in \mathbb{N})$ et vérifier l'égalité :

8 $$0 < R = \min\left\{\frac{1}{|\alpha|}, \frac{1}{|\beta|}\right\}$$

2/ a) Exprimer $(\beta - \alpha)^2 F_n^2$ et $(\beta - \alpha)^2 F_{n-1} F_{n+1}$ en fonction de β^{2n+2}, α^{2n+2}, β^2 et α^2.

• En déduire l'identité :

9 $$F_n^2 - F_{n-1} F_{n+1} = (-1)^n \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

b) En faisant usage des relations récurrentes 1 vérifiées par la suite $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$, établir l'identité :

10 $$F_{n+k} = F_k F_n + F_{k-1} F_{n-1} \quad , \forall (n,k) \in \mathbb{N}^2$$

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on considère la série entière de terme général $(F_{n+k} z^n : n \in \mathbb{N})$, $z \in \mathbb{C}$. Lorsqu'elle converge, on note $\Phi_k(z;1)$ sa somme :

11 $$\Phi_k(z;1) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_{n+k} z^n$$

• Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

• Déduire des résultats précédents, qu'indépendamment de $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < R$ et de $k \in \mathbb{N}$, une relation simple 12 lie :

12 $\Phi_k(z;1)$, $\Phi(z)$, F_k , F_{k-1} et z.

3/ a) On considère l'ensemble $\mathbf{E}$ des suites numériques complexes $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ vérifiant la relation :

13 $$Y_n = Y_{n-1} + Y_{n-2} \quad , \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

• Déterminer les suites $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbf{E}$ de la forme $Y_n = \rho^n$ pour $\rho \in \mathbb{C}$.

• Montrer que toute suite $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbf{E}$ est déterminée de manière unique par les valeurs de Y_0 et Y_1.

• Montrer que toute suite $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbf{E}$ se met d'une manière unique sous la forme :

14 $$Y_n = aF_n + bF_{n-1} \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

où a et b sont deux constantes dont on donnera l'expression en fonction de Y_0 et Y_1.

b) On appelle *suite de Lucas* la suite récurrente $\{L_n : n \in \mathbf{N}\}$ définie par :

15
$$\begin{cases} L_0 = 2 \\ L_1 = 1 \\ L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad , \forall n \geq 2 \end{cases}$$

- Montrer que L_n s'exprime de façon simple en fonction de α^n et β^n, où α et β sont définis par l'identité 7, compte tenu de $F_0=F_1=1$.
- Montrer que L_n s'exprime de façon simple en fonction de F_n et F_{n-1}, indépendamment de $n \in \mathbf{N}$. En déduire que L_n s'exprime de façon simple en fonction de F_n et F_{n-2}, indépendamment de $n \in \mathbf{N}$. Préciser explicitement chacune de ces deux relations.

4/ a) Soit $\{F_n : n \in \mathbf{Z}\}$ la suite définie par 7. On considère les séries entières de termes généraux $(F_{2n}z^{2n} : n \in \mathbf{N})$, $(F_{2n+1}z^{2n+1} : n \in \mathbf{N}), z \in \mathbf{C}$ et pour tout couple d'entiers (m, k) tels que $m \geq 1$ et $k \geq 0$ la série entière de terme général $(F_{mn+k}z^{mn+k} : n \in \mathbf{N})$. Lorsque ces séries convergent on pose :

16
$$\Phi_0(z;2) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_{2n} z^{2n}, \quad \Phi_1(z;2) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_{2n+1} z^{2n+1}$$

17
$$\Phi_k(z;m) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_{mn+k} z^{mn+k}$$

- Déterminer les rayons de convergence de ces trois séries entières.
- Montrer que, pour tout $z \in \mathbf{C}$ vérifiant $|z| < R$, $\Phi_0(z;2)$ et $\Phi_1(z;2)$ ont des expressions simples en fonction de $\Phi(z)$ et de $\Phi(-z)$.
- Exprimer réciproquement $\Phi(z)$ et $\Phi(-z)$ en fonction de $\Phi_0(z;2)$ et $\Phi_1(z;2)$.

b) Dans cette question et dans toute la suite du problème, on pose :

18
$$r_m = \exp\left(\frac{2i\pi}{m}\right) \quad , \forall m \geq 1.$$

- Pour tout couple d'entiers (m, k) tels que $m \geq 1$ et $0 \leq k \leq m-1$, montrer que $\Phi_k(z;m)$ est une combinaison linéaire des $\{\Phi(r_m^j z) : 1 \leq j \leq m\}$, lorsque $|z| < R$.
- Réciproquement, pour tout couple d'entiers (m, j) tels que $m \geq 1$ et $1 \leq j \leq m$, montrer que $\Phi(r_m^j z)$ est une combinaison linéaire des $\{\Phi_k(z;m) : 0 \leq k \leq m-1\}$, lorsque $|z| < R$.

c) Montrer que, pour tout couple d'entiers (m, k) tels que $m \geq 1$ et $0 \leq k \leq m-1$, une relation simple 19 lie :

19
$$\sum_{j=1}^{m} \frac{r_m^{-kj}}{1 - r_m^j z} \quad \text{et} \quad \frac{z^k}{1 - z^m} \quad , \forall z \in \mathbf{C}, |z| < R$$

- Préciser les versions particulières de cette relation obtenues pour $(m,k) = (2,0)$ et $(m,k) = (2,1)$.

d) Montrer que, pour tout couple d'entiers (m, k) tels que $m \geq 1$ et $0 \leq k \leq m-1$, une relation simple 20 lie :

20
$$\Phi_k(z;m) \quad \text{et} \quad \frac{\beta^{k+1} z^k}{1 - \beta^m z^m} - \frac{\alpha^{k+1} z^k}{1 - \alpha^m z^m} \quad , \forall z \in \mathbf{C}, |z| < R$$

e) Etablir l'identité, pour tout couple d'entiers (m, k) tels que $m \geq 1$ et $0 \leq k \leq m-1$,

21 $$\Phi_k(z;m) = \frac{z^k\left\{F_k + (-1)^{k+1} F_{m-k-2} z^m\right\}}{1-\left(\alpha^m + \beta^m\right)z^m + (-1)^m z^{2m}} \quad , \forall z \in \mathbf{C}, |z| < R$$

• En déduire une relation simple 22 , liant, $\forall z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| < R^{\frac{1}{m}}$,

22 $$\sum_{j=0}^{+\infty} F_{k+jm} z^j \quad \text{et} \quad \frac{F_k + (-1)^{k+1} F_{m-k-2} z}{1-\left(F_m + F_{m-2}\right)z + (-1)^m z^2}$$